Interrogation 2

6 mars 2025

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et considérons les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $M - \lambda I$. 0.5pt
2. Déterminer $\det(M - \lambda I)$.1pt
3. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $M - \lambda I$ n'est pas inversible.1pt

Correction :

1. Le calcul de $M - \lambda I$ donne :

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & 12 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La matrice $M - \lambda I$ étant triangulaire supérieure, son déterminant est donné par le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(-2-\lambda)(5-\lambda).$$

3. La matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul :

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)(5-\lambda) = 0.$$

Ainsi, les valeurs de λ pour lesquelles $M - \lambda I$ n'est pas inversible sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 5.$$

Exercice 2

Soit $v = (1, 3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{D}$ la droite vectorielle dirigée par v.

1. Donner une une équation paramétrique de $\mathcal{D}$. 1pt
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.1pt
3. Donner une équation matricielle de $\mathcal{D}$.1pt

Correction :

1. La droite est décrite comme l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur directeur fixé v. Donc $\mathcal{D} = \{\lambda v \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. La droite est décrite comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur w. Choisissons le vecteur $w = (-3, 1)$, on a bien $v.w = 0$ donc w est orthogonal à v,
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; w(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -3x + y = 0\}$$
3. Il ne s'agit ici que d'un jeu d'écriture : $\mathcal{D} = \ker A = \{X \in \mathbb{R}^2; AX = 0\}$ avec $A = (-3 \ 1) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les expressions suivantes :

$$S_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}, \quad I = \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer la limite de S_n. 2.5pt
2. En Justifiant son existence, calculer la valeur de l'intégrale I. 2pt
3. **Bonus :** Déterminer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant son existence : 1pt
$$J = \int_0^1 \ln(1 + x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Correction

1. On réécrit S_n sous forme d'une somme de Riemann :
$$S_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
avec $f : x \in [0, 1] \to \sqrt{x}$, S_n est donc une somme de Riemann. f étant continue sur $[0, 1]$, donc $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ existe et on a,
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2. Soit $g(t) = \sin^4(t)$. La fonction g est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc l'intégrale I existe. En utilisant la forme linéarisée, nous avons $sin^4(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4$, en utilisant le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{(2i)^4}\sum_{k=0}^{4}\frac{4!}{k!(4-k)!}(-1)^k e^{i(4-k)t}e^{-ikt} \\ &= \frac{1}{16}(e^{4it} - 4e^{3it}e^{-it} + 6e^{2it}e^{-2it} - 4e^{it}e^{-3it} + e^{-4it}) \\ &= \frac{1}{8}(\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2} - 4\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + \frac{6}{2}) \\ &= \frac{1}{8}(\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3) \end{aligned}$$

Donc $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}(\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4t)}{4} - 4\frac{\sin(2t)}{2} + 3t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(0 - 0 + \frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{16}$

3. **Bonus :** la fonction $h(x) = \ln(1+x^2)$ est définie et continue sur $[0, 1]$ donc J existe. $J = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Rappel : La formule du binôme de Newton est donnée par :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k.$$