Interrogation 3

10 avril 2025

Exercice 1

Soit les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1}\, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x(\ln(x))^2 + x}\, dx$$

et la fonction :

$$f(x) = \frac{24x^3 + 18x^2 + 10x - 9}{(3x-1)(2x+1)^2}$$

1. À l'aide de changements de variables appropriés, calculez les intégrales I_1 et I_2. (3 pts)
2. En justifiant son existence, calculez une primitive de f. (1.5 pts)

Correction :

1. **Intégrale I_1 :** la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et en particulier pour $x \in [0, 2]$. Elle est également continue sur cet intervalle, ce qui garantit que l'intégrale I_1 est bien définie. On effectue alors le changement de variable $u = e^x$,

$$du = e^x\, dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{u}.$$

Lorsque $x = 0$, $u = 1$, et lorsque $x = 2$, $u = e^2$. L'intégrale devient alors :

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int_1^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}\, du.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= [\ln|u| - \ln|u+1|]_1^{e^2} \\
&= \ln(e^2) - \ln(e^2+1) - \ln(1) + \ln(2) \\
&= 2 - \ln(e^2+1) + \ln(2). \qquad (\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2)
\end{aligned}$$

Intégrale I_2 : La fonction $g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2+x}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $[1, 2]$. Elle est également continue sur cet intervalle, ce qui garantit que l'intégrale I_2 est bien définie. Posons $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x}dx$, soit $dx = x\,du$, lorsque $x = 1$ on a $u = \ln(1)$ et lorsque $x = 2$ on a $u = \ln(2)$. On remarque que :

$$\frac{1}{x(\ln x)^2 + x} = \frac{1}{x(u^2+1)}.$$

L'intégrale devient alors :

$$I_2 = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{1}{x(u^2+1)} \cdot x\,du = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{u^2+1}\,du,$$

et donc :

$$I_2 = [\arctan(u)]_0^{\ln(2)} = \arctan(\ln(2)).$$

2. **Primitive de f.** La fonction $f(x)$ est une fraction rationnelle, dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré 3. Comme le dénominateur s'annule en $x = \frac{1}{3}$ et $x = -\frac{1}{2}$, la fonction est définie et continue sur tout intervalle ne contenant pas ces points, donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1/2, 1/3\}$

   On commence par la division euclidienne :

$$\frac{24x^3 + 18x^2 + 10x - 9}{(3x-1)(2x+1)^2} = 2 + \frac{26x^2 - 12x - 7}{(3x-1)(2x+1)^2}.$$

On décompose le reste :

$$\frac{26x^2 - 12x - 7}{(3x-1)(2x+1)^2} = \frac{a}{3x-1} + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{(2x+1)^2}.$$

En mettant au même dénominateur et identifiant les coefficients, on résout le système suivant

$$\begin{cases} 4a + 6b = 2 \\ 4a + b + 3c = 12 \\ a - b - c = -7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = 1, \quad c = 5.$$

Soit $[c, x] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1/2, 1/3\}$, on en déduit que :

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x \left(2 + \frac{-1}{3t-1} + \frac{1}{2t+1} + \frac{5}{(2t+1)^2}\right) dt.$$

En intégrant terme à terme :

$$F(x) = 2x - \frac{1}{3}\ln(|3x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

(On suppose la constante d'intégration nulle.)

Exercice 2

L'intégrale suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Correction :

La fonction $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est définie sur $]0,1]$, avec une discontinuité en $t = 0$, donc l'intégrale est impropre. Cependant, au voisinage de 0 :

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1 \quad \text{car } \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$$

Comme $\int_0^1 1\,dt = 1$, par critère d'équivalence l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

Exercice 3

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ est-elle convergente ?(1 pt)
2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\arctan(x)\,dx$ est-elle convergente ?(1 pt)

   Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles l'intégrale est convergente. Pour tout $a \in \mathcal{D}$, on définit : $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\arctan(x)\,dx$
3. Montrez que $I(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,dx$ (2 pts)
4. En supposant que $\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$, donnez un équivalent de $I(a)$ lorsque $a \to +\infty$. (0.5 pt)

Correction

1. La fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Le problème d'existence de l'intégrale ne se pose qu'en $+\infty$. Si $a = 0$, alors pour tout $X \geq 0$, on a $\int_0^X e^{-ax}dx = X$ qui tend vers $+\infty$ si $X \to +\infty$. Si $a \neq 0$, alors on a $\int_0^X e^{-ax}dx = \frac{-1}{a}e^{-aX} + \frac{1}{a}$. Ceci admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$. L'intégrale impropre est donc bien définie si et seulement si $a > 0$.
2. La fonction $x \mapsto e^{-ax}\arctan(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Le problème d'existence de l'intégrale ne se pose qu'en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, on a

   $$e^{-ax}\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

   Les fonctions étant positives, on déduit par équivalence et de la question précédente que $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\arctan(x)dx$ converge si et seulement si $a > 0$.
3. Nous avons montré précédemment que $\int_0^{+\infty} e^{-at}\arctan(t)\mathrm{d}t$ existe, pour prouver l'égalité demandé, il suffit de faire une double intégration par parties. Soit $\int_0^{+\infty} e^{-at}\arctan(t)\mathrm{d}t =$

$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-at} \arctan(t)\mathrm{d}t$. Posons $u'(t) = \frac{-1}{a} e^{-at}$ et $v(t) = \arctan(t)$. Donc $u(t) = -\frac{1}{a} e^{-at}$ et $v'(x) = \frac{1}{1+t^2}$,

$$F(x) = [\frac{1}{a} e^{-at} \arctan(t)]_0^x + \int_0^x \frac{1}{a} e^{-at} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a} e^{-ax} \arctan(x) = 0$ (car $a > 0$), on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-ax} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

On réalise une deuxième intégration par parties en posant cette fois $f'(x) = \frac{-1}{a} e^{-ax}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a $f(x) = \frac{1}{a^2} e^{-ax}$ et $u'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^2} e^{-ax} \frac{1}{1+x^2} = 0$ (car $a > 0$). On en déduit que

$$I(a) = \frac{1}{a^2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} 2x}{a^2(1+x^2)^2} dx$$

4. Soit $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2}\, dx$, de la question précédente on a $I(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2} J(a)$, de l'hypothèse donnée on sait que $\lim_{a\to+\infty} J(a) = 0$. Donc $\lim_{a\to+\infty} \frac{I(a)}{\frac{1}{a^2}} = 1$. Cela implique que $I(a) \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$