Interrogation 4

28 avril 2025

Exercice 1

Soit,

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-1)}, \quad v_n = \frac{\cos(3n\theta)}{4^n}, \quad d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la nature des séries de termes généraux respectifs u_n, v_n, d_n. (3 pts)
2. Calculer la somme de la série de terme générale v_n. (1pt + 1 pt bonus)

Correction :

1. La série de terme général u_n est définie pour $n > 1$ (car $n = 1$ annule $n^2 - 1$). Pour n assez grand,
$$u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-1)} \sim_{n\to\infty}= \frac{2}{n^2}.$$
Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann), donc par équivalence, la série $\sum u_n$ converge.

   La série de terme générale v_n est définie pour $n \geq 0$, elle alterne de signe à cause du $\cos(3\theta n)$. Étudions la convergence absolue : $\left|\frac{\cos(3\theta n)}{4^n}\right| \leq \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. La série $\sum_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrique convergente, donc par majoration la série de terme générale v_n converge absolument ce qui implique qu'elle converge simplement.

   La série de terme générale d_n est définie pour $n > 0$. Elle est à termes positifs. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{(-n+1/2+o(1))} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$. $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Donc par équivalence la série de terme générale d_n converge.

2. Soit $N > 0$, on a,
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{3in\theta}}{4^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(3n\theta)}{4^n} + i\sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(3n\theta)}{4^n} \tag{1}$$
$\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{3in\theta}}{4^n}$ est une somme géométrique,
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{3in\theta}}{4^n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{e^{3i\theta}}{4}\right)^n = \frac{1 - \frac{e^{3i(N+1)\theta}}{4^{N+1}}}{1 - \frac{e^{3i\theta}}{4}} \tag{2}$$

Or par le même argument que ci-dessus, toutes ces séries convergent donc on peut passer à la limite. De plus comme $\left|\frac{e^{3i(N+1)\theta}}{4^{N+1}}\right| \leq \frac{1}{4^{N+1}} \to_{N\to\infty} 0$, il s'ensuit que $\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{3in\theta}}{4^n} \to_{N\to\infty} \frac{4}{4-e^{3i\theta}}$. Pour extraire la partie réelle de cette somme, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{4-e^{3i\theta}} &= \frac{4}{4-\cos(3\theta)-i\sin(3\theta)} && (3)\\
&= \frac{4(4-\cos(3\theta)+i\sin(3\theta))}{(4-\cos(3\theta))^2+\sin(3\theta)^2} && (4)\\
&= \frac{4(4-\cos(3\theta)+i\sin(3\theta))}{16+\cos(3\theta)^2-8\cos(3\theta)+\sin(3\theta)^2} && (5)\\
&= \frac{4(4-\cos(3\theta)+i\sin(3\theta))}{17-8\cos(3\theta)} && (6)\\
&= 4\frac{4-\cos(3\theta)}{17-8\cos(3\theta)} + 4i\frac{\sin(3\theta)}{17-8\cos(3\theta)} && (7)
\end{aligned}
$$

En identifiant la partie réelle et imaginaire de la limite, on a $\sum \frac{\cos(3n\theta)}{4^n} = 4\frac{4-\cos(3\theta)}{17-8\cos(3\theta)}$.

Exercice 2

Soit pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}$$

Soit pour tout $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}$$

1. Calculer la limite de u_{n+1}/u_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0.5pt)
2. Montrer que la suite (nu_n) est croissante. (0.5pt)
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n. (1pt)
4. En supposant que pour $1 < \alpha < 3/2$, $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$, déterminer la nature de la série de terme général v_n. (1pt)

Correction

1. Pour $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n+2)}\frac{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} \to_{n\to\infty} 1$.
2. Pour $n \geq 1$, $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1$, par conséquent la suite (nu_n) est croissante.
3. Comme u_n est positive, on a $nu_n \geq u_1$, donc $u_n \geq \frac{u_1}{n}$. La série $\sum_n \frac{u_1}{n}$ est divergente par le critère de Riemann, donc par minoration la série de terme générale u_n est divergente.

4. Soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est vraie. On a, pour $n > n_0$,

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n_0}} &= \frac{v_n}{v_{n-1}}\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\cdots\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ &\le \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{(n-2)^\alpha}{(n-1)^\alpha}\cdots\frac{n_0^\alpha}{(n_0+1)^\alpha} \\ &\le \frac{n_0^\alpha}{n^\alpha}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$, on a

$$v_n \le v_{n_0} \cdot \frac{n_0^\alpha}{n^\alpha}.$$

Or, puisque $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le critère de Riemann. Par conséquent, la série de terme général v_n converge par majoration.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle,

$$(E): \qquad y' + 2y = x^2 - 2x + 3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (E). (1.5pt)
2. Que devient la solution si l'on impose la condition initiale $y(0) = 3$? (0.5pt)

Correction

1. **Solution homogène :** Soit l'équation homogène,

$$(E_0): y' + 2y = 0$$

Soit $\alpha : x \in \mathbb{R} \to 2$, une primitive de α est donnée par $A : x \in \mathbb{R} \to 2x$, donc l'ensemble des solutions homogène est donnée par $\{y_c : x \in \mathbb{R} \to Ce^{-2x} | C \in \mathbb{R}\}$. **Solution particuliere** Le second membre de (E) est un polynôme de degré 2.Donc on cherche une solution particulière y_p sous forme de polynome de degré 2.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y_p'(x) = 2ax + b$. On injecte dans l'equation (E) et on obtient,

$$\begin{aligned}2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3 \\ 2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c = x^2 - 2x + 3\end{aligned}$$

Par identification, on trouve,

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/2 \\ c = 9/4 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est donné par,

$$\{y : x \in \mathbb{R} \to Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} | C \in \mathbb{R}\}$$

2. Il suffit d'identifier les solutions vérifiant $y(0) = 3$. Pour tout $C \in \mathbb{R}, y(0) = C + \frac{9}{4}$ donc $y(0) = 3$ impose $C = 3/4$. L'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$ est donc donnée par,
$$y : x \in \mathbb{R} \to \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$